SLOŽENOST ALGORITAMA
I
ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović

0.1 Pseudoinverzne matrice

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ realna matrica tipa $m\times n$. Naš zadatak je da nađemo realnu matricu $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tipa $n\times m$ koja je rešenje sistema *Penrose-ovih jednačina*:

(1) $A\cdot X\cdot A = A$

(2) $X\cdot A\cdot X = X$

(3) $(A\cdot X)^T = A\cdot X$

(4) $(X\cdot A)^T = X\cdot A$.

Takva matrica X uvek postoji i jedinstvena je, [**Penrose55**]. Matrica X koja je rešenje datog sistema matričnih jednačina naziva se *Moor-Penrose-ov inverz*. Primetimo, da je Moor-Penrose-ov inverz regularne matrice A njena inverzna matrica. Izuzev matrice koja je rešenje sve četiri Penrose-ove jednačine, od interesa će nam biti i one matrice koje su rešenje samo neke od matričnih jednačina. Pa tako skup rešenja jednačine (j), $1\le j\le 4$, označavamo sa $A\{j\}$, preciznije:

$$A\{1\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid A\cdot X\cdot A = A\}$$

$$A\{2\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid X\cdot A\cdot X = X\}$$

$$A\{3\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid (A\cdot X)^T = A\cdot X\}$$

$$A\{4\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid (X\cdot A)^T = X\cdot A\}.$$

Proizvoljan element skupa $A\{j\}$ označavamo sa $A^{(j)}$ i nazivamo ga $\{j\}$-inverz, $1\le j\le 4$. Dalje, oznaku $A\{i,j\}$ koristimo za presek skupova $A\{i\}$ i $A\{j\}$, tj. za skup rešenja jednačina (i) i (j), $1\le i\le j\le 4$. Proizvoljan element skupa $A\{i,j\}$ označavamo sa $A^{(i,j)}$ i nazivamo ga $\{i,j\}$-inverz, $1\le i\le j\le 4$. Takođe, skup rešenja jednačina (i), (j) i (k), $1\le i\le j\le k\le 4$, označavamo sa $A\{i,j,k\}$, proizvoljan element iz datog skupa označavamo sa $A^{(i,j,k)}$ i nazivamo ga $\{i,j,k\}$-inverz. U slučaju da je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ kompleksna matrica sistem Penrose-ovih jednačina glasi:

(1) $A\cdot X\cdot A = A$

(2) $X\cdot A\cdot X = X$

(3) $(A\cdot X)^* = A\cdot X$

(4) $(X\cdot A)^* = X\cdot A$,

gde je $*$ konjugovano transponovanje. Konjugovano transponovana matrica matrice A je matrica $A^* = \left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ij}}]^T_{m\times n} = [\overline{a_{ji}}]_{n\times m}$, gde je $\overline{a_{ji}}$ konjugovano kompleksan broj broja a_{ji}.

Definicija 0.1.1 Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna matrica. Matricu $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tipa $n\times m$ koja zadovoljava neku od Penrose-ovih jednačina (1)-(4) nazivamo *pseudoinverznom matricom* matrice A.

Detaljan pregled teorije pseudoinverznih matrica može se naći u knjigama [**BenGreville03**, **Bapat12**, **CampbellMeyer09**, **Ravishanker01**].

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna matrica i $P\cdot A\cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Matrice P i Q su proizvodi elementarnih matrica reda m, odnosno n, koje uspostavljaju ekvivalenciju između matrica A i E_r, gde je I_r jedinična matrica i r rang matirce A. *$\{1\}$-inverz* ili *uopšteni inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $A\cdot X\cdot A = A$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, gde je I_r jedinična matrica reda r, a X_1, X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1\}$-inverz matrice A. Zaista, kako su matrice P i Q regularne važi da je $A = P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1}$, pa prema tome imamo:

$$
\begin{aligned}
A \cdot X \cdot A &= P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P \cdot P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} \\
&= P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} \\
&= P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} \\
&= P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} = A.
\end{aligned}
$$

Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{1\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$. Za proizvoljne matrice X_1, X_2 i X_3 redom tipa $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$ matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *opštim $\{1\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{1\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_1 = n \cdot m - r^2$. Za konkretno izabrane matrice X_1, X_2 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{1\}$-inverzom* matrice A.

Zadatak 0.1 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1\}$-inverz matrice A.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E_2 & P \\ \hline Q & \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
P = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{aligned}
X &= Q\cdot\left[\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline x_1 & x_2\end{array}\right]\cdot P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline x_1 & x_2\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1-x_1&-x_2\\x_1&x_2\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+2x_1-x_2&3-3x_1+x_2\\-2x_1+x_2&3x_1-x_2\\1&-1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 0.2 Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1\}$-inverz matrice A.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c}A&I_3\\ \hline I_3&\end{array}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&9&0&0&1\\ \hline 1&0&0&&&\\0&1&0&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]\cong\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-12&-7&0&1\\ \hline 1&0&0&&&\\0&1&0&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]\\
&\cong\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&0&1&-2&1\\ \hline 1&0&0&&&\\0&1&0&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]\cong\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-3&0&-4&1&0\\0&0&0&1&-2&1\\ \hline 1&0&0&&&\\0&1&-2&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\cong\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-3&0&-4&1&0\\0&0&0&1&-2&1\\ \hline 1&-2&1&&&\\0&1&-2&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]\cong\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1&-2&1\\ \hline 1&-2&1&&&\\0&1&-2&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}E_2&P\\ \hline Q&\end{array}\right]$$

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\qquad Q=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X &= Q\cdot\left[\begin{array}{cc|c}1&0&y_1\\0&1&y_2\\ \hline x_1&x_2&z\end{array}\right]\cdot P=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c}1&0&y_1\\0&1&y_2\\ \hline x_1&x_2&z\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1+x_1&-2+x_2&y_1-2y_2+z\\-2x_1&1-2x_2&y_2-2z\\x_1&x_2&z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}+x_1+\frac{4}{3}x_2+y_1-2y_2+z&\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_2-2y_1+4y_2-2z&y_1-2y_2+z\\\frac{4}{3}-2x_1-\frac{8}{3}x_2+y_2-2z&-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_2-2y_2+4z&y_2-2z\\x_1+\frac{4}{3}x_2+z&-\frac{1}{3}x_2-2z&z\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 0.3 Data je matrica $A=\begin{bmatrix}2&1&4\\2&1&0\\0&0&2\\2&1&2\end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1\}$-inverz matrice A.

Rešenje.

$$
\left[\begin{array}{c|c} A & I_4 \\ \hline I_3 & \end{array}\right]
= \left[\begin{array}{ccc|cccc}
2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
$$

$$
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
-2 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
$$

$$
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
-2 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & & & & \\
-2 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
$$

$$
\cong \left[\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline
0 & 0 & 1 & & & & \\
1 & 0 & -2 & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & &
\end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|c} E_2 & P \\ \hline Q & \end{array}\right]
$$

$$
P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & y_{11} & y_{12} \\
0 & 1 & y_{21} & y_{22} \\ \hline
x_1 & x_2 & z_1 & z_2
\end{array}\right] \cdot P =
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot
\left[\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & y_{11} & y_{12} \\
0 & 1 & y_{21} & y_{22} \\ \hline
x_1 & x_2 & z_1 & z_2
\end{array}\right] \cdot
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \\
1-2x_1 & -2x_2 & y_{11}-2z_1 & y_{12}-2z_2 \\
0 & 1 & y_{21} & y_{22}
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
z_1 & x_1 - z_1 - z_2 & \frac{1}{2}x_2 - 2z_1 - z_2 & z_2 \\
y_{11} - 2z_1 & 1 - 2x_1 - y_{11} + 2z_1 - y_{12} + 2z_2 & -x_2 - 2y_{11} + 4z_1 - y_{12} + 2z_2 & y_{12} - 2z_2 \\
y_{21} & -y_{21} - y_{22} & \frac{1}{2} - 2y_{21} - y_{22} & y_{22}
\end{bmatrix}. \quad \square
$$

Zadatak 0.4 Dokazati da je jedan $\{1\}$-inverz matrice $J_n = [1]_{n\times n}$ matrica $\frac{1}{n}I_n$.

Rešenje. Važi $J_n \cdot \frac{1}{n}I_n \cdot J_n = \frac{1}{n}J_n^2 = \frac{1}{n}[n]_{n\times n} = [1]_{n\times n} = J_n$. □

Zadatak 0.5 Dokazati da je jedan $\{1\}$-inverz dijagonalne matrice $D = diag(d_1, d_2, \dots d_n)$ dijagonalna matrica $G = diag(g_1, g_2, \dots g_n)$, za koju važi $g_i = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & d_i \neq 0 \\ 0, & d_i = 0. \end{cases}$

Rešenje. Važi:

$$\begin{aligned} D\cdot G\cdot D &= diag(d_1, d_2, \dots d_n)\cdot diag(g_1, g_2, \dots g_n)\cdot diag(d_1, d_2, \dots d_n) \\ &= diag(d_1\cdot g_1\cdot d_1, d_2\cdot g_2\cdot d_2, \dots d_n\cdot g_n\cdot d_n) \\ &= diag(d_1, d_2, \dots d_n). \end{aligned}$$ □

Zadatak 0.6 Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ realna matrici tipa $m\times n$ ranga r. Neka je $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrica za koju važi $P\cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa

$$X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]\cdot P.$$

Rešenje. Za $\{1\}$-inverz X matrice A važi $A\cdot X\cdot A = A$. Matrica P je regularna matrica kao proizvod elementarnih matrica reda m. Prema tome, za matricu A važi $A = P^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Imamo:

$$\begin{aligned} A\cdot X\cdot A &= P^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]\cdot P\cdot P^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \\ &= P^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] = P^{-1}\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] = A. \end{aligned}$$

□

Zadatak 0.7 Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica. Dokazati da je $A\{1\} = \{A^{-1}\}$.

Rešenje. Podsetimo se, $A\{1\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A\cdot X\cdot A = A\}$. Množenjem sleva i zdesna matrične jednakosti $A\cdot X\cdot A = A$ sa matricom A^{-1}, dobijamo da je $X = A^{-1}$, gde je X proizvoljan $\{1\}$-inverz matrice A. Prema tome, $A\{1\} = \{A^{-1}\}$. □

Zadatak 0.8 Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ proizvoljan $\{1\}$-inverz matrice A. Dokazati da su matrice $A\cdot A^{(1)}$ i $A^{(1)}\cdot A$ idempotentne.

Rešenje. Podsetimo se, matrica M je idempotentna ako važi da je $M^2 = M$. Za $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ matrice A važi $A\cdot A^{(1)}\cdot A = A$. Prema tome, imamo:

$$A\cdot A^{(1)} = \left(A\cdot A^{(1)}\cdot A\right)\cdot A^{(1)} = \left(A\cdot A^{(1)}\right)\cdot\left(A\cdot A^{(1)}\right) = \left(A\cdot A^{(1)}\right)^2$$
$$A^{(1)}\cdot A = A^{(1)}\cdot\left(A\cdot A^{(1)}\cdot A\right) = \left(A^{(1)}\cdot A\right)\cdot\left(A^{(1)}\cdot A\right) = \left(A^{(1)}\cdot A\right)^2.$$ □

Zadatak 0.9 Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ proizvoljan $\{1\}$-inverz matrice A. Dokazati da su matrice $I_m - A\cdot A^{(1)}$ i $I_n - A^{(1)}\cdot A$ idempotentne.

Rešenje. Dokazaćemo samo da je matrica $I_m - A\cdot A^{(1)}$ idempotentna. Za matricu $I_n - A^{(1)}\cdot A$ dokaz izvodimo analogno. Zaista, imamo:

$$\begin{aligned}\left(I_m - A\cdot A^{(1)}\right)^2 &= I_m - 2A\cdot A^{(1)} + \left(A\cdot A^{(1)}\right)^2 = I_m - 2A\cdot A^{(1)} + \left(A\cdot A^{(1)}\cdot A\right)\cdot A^{(1)}\\ &= I_m - 2A\cdot A^{(1)} + A\cdot A^{(1)} = I_m - A\cdot A^{(1)}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 0.10 (a) Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrica za koju važi $rang(A) = 1$ i $a \neq 0$. Dokazati da je $d = \frac{b\cdot c}{a}$ i da je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Odrediti jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(c) Neka je $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ blok matrica za koju važi $rang(H) = rang(A) = r$, $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $C \in \mathbb{R}^{(m-r)\times r}$ i $D \in \mathbb{R}^{(m-r)\times(n-r)}$. Dokazati da je $D = C\cdot A^{-1}\cdot B$ i da je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice H dat sa $X = \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

(d) Odrediti jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Rešenje.

(a) Rang matrice A, koja je reda 2, jednak je 1. Prema tome, determinanta matrice A jednaka je 0. Imamo $det(A) = a\cdot d - b\cdot c = 0$ i $a \neq 0$, što implicira $d = \frac{b\cdot c}{d}$. Matrica X je $\{1\}$-inverz matrice A ako važi $A\cdot X\cdot A = A$.

$$A\cdot X\cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{b\cdot c}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(b) Na osnovu prethodnog primera zaključujemo da je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Opšti $\{1\}$-inverz matrice A određujemo sledećim postupkom:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_2 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E_1 & P \\ \hline Q & \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} 1 & y \\ \hline x & z \end{array}\right]\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{c|c} 1 & y \\ \hline x & z \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2x & y-2z \\ x & z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2x-3y+6z & y-2z \\ x-3z & z \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Parcijalni $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ dobijamo iz opšteg $\{1\}$-inverza X za $x = y = z = 0$.

(c) Vrste matrice H razmatramo kao vektore u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ nad poljem $\mathbb{R}$. Kako je rang matrice A jednak r, prvih r vrsta matrice H su linearno nezavisne. Rang matrice H je takođe jednak r, pa se poslednjih $m-r$ vrsta može predstaviti kao linearna kombinacija prvih r. Zaista, postoji matrica $T \in \mathbb{R}^{(m-r)\times r}$ takva da važi $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\cdot A & T\cdot B \end{bmatrix}$. Rang matrice A je jednak njenom redu, pa je matrica A regularna. Kako je matrica A regularna, iz $C = T\cdot A$ zaključujemo da je $T = C\cdot A^{-1}$. Zamenom u matričnu jednačinu $D = T\cdot B$ dobijamo $D = C\cdot A^{-1}\cdot B$. Matrica X je $\{1\}$-inverz matrice H ako važi $H\cdot X\cdot H = H$.

$$\begin{aligned} H\cdot X\cdot H &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ C\cdot A^{-1} & \mathbb{O} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & C\cdot A^{-1}\cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = H. \end{aligned}$$

(d) U duhu prethodnog primera imamo da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$. Označimo vrste matrice H sa $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ i $v_3 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Primetimo da su vrste v_1 i v_2 linearno nezavisne, dok se vrsta v_3 može predstaviti kao njihova linearna kombinacija, preciznije $v_3 = -v_1 + 2v_2$. Za matricu T važi $T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$. Provere radi imamo $T = C\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $D = T\cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$. Na osnovu prethodnog primera zaključujemo da je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice H dat sa $H^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. U zadatku 0.2 pokazali smo da je opšti $\{1\}$-inverz matrice H dat sa

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}+x_1+\frac{4}{3}x_2+y_1-2y_2+z & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_2-2y_1+4y_2-2z & y_1-2y_2+z \\ \frac{4}{3}-2x_1-\frac{8}{3}x_2+y_2-2z & -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_2-2y_2+4z & y_2-2z \\ x_1+\frac{4}{3}x_2+z & -\frac{1}{3}x_2-2z & z \end{bmatrix}.$$

Parcijalni $\{1\}$-inverz $H^{(1)}$ dobijamo iz opšteg $\{1\}$-inverza X za $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z = 0$.

□

Zadatak 0.11 Neka su date matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dokazati da je $\begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix}$ jedan $\{1\}$-inverz matrice $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ ako i samo ako je $B\cdot B^{(1)}\cdot A = \mathbb{O}$ i $A\cdot A^{(1)}\cdot B = \mathbb{O}$.

Rešenje. Matrica $\begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix}$ je jedan $\{1\}$-inverz matrice $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ ako i samo ako važi:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} &= \left(A \cdot A^{(1)} + B \cdot B^{(1)} \right) \cdot \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(A \cdot A^{(1)} + B \cdot B^{(1)}\right) \cdot A & \left(A \cdot A^{(1)} + B \cdot B^{(1)}\right) \cdot B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A \cdot A^{(1)} \cdot A + B \cdot B^{(1)} \cdot A & A \cdot A^{(1)} \cdot B + B \cdot B^{(1)} \cdot B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + B \cdot B^{(1)} \cdot A & A \cdot A^{(1)} \cdot B + B \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Potreban i dovoljan uslov da matrica $\begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix}$ bude jedan $\{1\}$-inverz matrice $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ je da važi matrična jednakost $\begin{bmatrix} A + B \cdot B^{(1)} \cdot A & A \cdot A^{(1)} \cdot B + B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, odnosno da važi $B \cdot B^{(1)} \cdot A = \mathbb{O}$ i $A \cdot A^{(1)} \cdot B = \mathbb{O}$. □

Zadatak 0.12 Neka je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jedan $\{1\}$-inverz matrice A. Dokazati da su za proizvoljne matrice $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sa

$$X = A^{(1)} + E - A^{(1)} \cdot A \cdot E \cdot A \cdot A^{(1)}$$

i

$$Y = A^{(1)} \cdot A \cdot A^{(1)} + \left(I_n - A^{(1)} \cdot A\right) \cdot E + F \cdot \left(I_m - A \cdot A^{(1)}\right)$$

data dva $\{1\}$-inverza matrice A.

Rešenje. Važi:

$$\begin{aligned}
A \cdot X \cdot A &= A \cdot \left(A^{(1)} + E - A^{(1)} \cdot A \cdot E \cdot A \cdot A^{(1)}\right) \cdot A \\
&= A \cdot A^{(1)} \cdot A + A \cdot E \cdot A - \left(A \cdot A^{(1)} \cdot A\right) \cdot E \left(A \cdot A^{(1)} \cdot A\right) \\
&= A + A \cdot E \cdot A - A \cdot E \cdot A = A
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
A \cdot Y \cdot A &= A \cdot \left(A^{(1)} \cdot A \cdot A^{(1)} + \left(I_n - A^{(1)} \cdot A\right) \cdot E + F \cdot \left(I_m - A \cdot A^{(1)}\right)\right) \cdot A \\
&= A \cdot A^{(1)} \cdot A \cdot A^{(1)} \cdot A + A \cdot \left(I_n - A^{(1)} \cdot A\right) \cdot E \cdot A + A \cdot F \cdot \left(I_m - A \cdot A^{(1)}\right) \cdot A \\
&= A \cdot A^{(1)} \cdot A + \left(A - A \cdot A^{(1)} \cdot A\right) \cdot E \cdot A + A \cdot F \cdot \left(A - A \cdot A^{(1)} \cdot A\right) \\
&= A + (A - A) \cdot E \cdot A + A \cdot F \cdot (A - A) = A + \mathbb{O} \cdot E \cdot A + A \cdot F \cdot \mathbb{O} = A.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 0.13 Data je simetrična matrica $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$. Odrediti bar jedan simetrični $\{1\}$-inverz matrice H.

Rešenje. Odredimo prvo opšti $\{1\}$-inverz matrice H.

$$\left[\begin{array}{c|c} H & I_3 \\ \hline I_3 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 22 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E_2 & P \\ \hline Q & \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= Q \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & z \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & z \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4-y_1 & -3-2y_1 & y_1 \\ -1-y_2 & 1-2y_2 & y_2 \\ 4x_1-x_2-z & -3x_1+x_2-2z & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(4-y_1+4x_1-x_2-z) & \frac{1}{2}(-3-2y_1-3x_1+x_2-2z) & \frac{1}{2}(y_1+z) \\ 4x_1-x_2-z & -3x_1+x_2-2z & z \\ \frac{1}{2}(-1-y_2-4x_1+x_2+z) & \frac{1}{2}(1-2y_2+3x_1-x_2+2z) & \frac{1}{2}(y_2-z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primetimo da iako je matrica H simetrična opšti $\{1\}$-inverz matrice H nije. Postoje parcijalni $\{1\}$-inverzi matrice H koji su simetrični i oni koji nisu. Matrica H se može blokovski zapisati kao:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ \hline 6 & 8 & 22 \end{array}\right].$$

Važi da je $rang(H) = rang(A) = 2$. Na osnovu Zadatka 0.10 imamo da je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice H matrica $X_1 = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Dati $\{1\}$-inverz matrice H dobili smo iz opšteg $\{1\}$-inverza X za $x_1 = y_1 = y_2 = z = 0$ i $x_2 = 1$. Inverzna matrica A^{-1} simetrične matrice A je simetrična, pa je i $\{1\}$-inverz X_1 simetričan. Za $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z = 0$ dobijamo još jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice H, $X_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$, koji nije simetrična matrica.

Sa druge strane, ako je X proizvoljan $\{1\}$-inverz simetrične matrice H, onda je i X^T njen $\{1\}$-inverz. Zaista, transponovanjem matrične jednakosti $H \cdot X \cdot H = H$, dobijamo matričnu jednakost $H^T \cdot X^T \cdot H^T = H^T$. Kako je H simetrična matrica važi $H = H^T$, odnosno $H \cdot X^T \cdot H = H$. Odakle direktno sledi da je X^T takođe $\{1\}$-inverz matrice H.

Dalje, ako je X proizvoljan $\{1\}$-inverz simetrične matrice H, onda je i $\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$ njen $\{1\}$-inverz. Važi, $H \cdot \frac{1}{2}\left(X + X^T\right) \cdot H = \frac{1}{2}\left(H \cdot X \cdot H + H \cdot X^T \cdot H\right)$. Matrice X i X^T su $\{1\}$-inverzi matrice H, pa je $\frac{1}{2}\left(H \cdot X \cdot H + H \cdot X^T \cdot H\right) = \frac{1}{2}(H + H) = H$. Odakle proizilazi da je $\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$ takođe $\{1\}$-inverz matrice H. Matrica $\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$ je simetrična matrica. Prema tome, za proizvoljan $\{1\}$-inverz X simetrične matrice H simetrični $\{1\}$-inverz date matrice će biti $\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$. □

Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ proizvoljna matrica i $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. *$\{2\}$-inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $X \cdot A \cdot X = X$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_0, X_1 i X_2 matrice redom tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times r$, za koje važi:

- $X_0^2 = X_0$ (matrica X_0 je idempotentna)
- $X_0 \cdot X_1 = X_1$
- $X_2 \cdot X_0 = X_2$,

jeste $\{2\}$-inverz matrice A.

Zaista, važi:

$$\begin{aligned}
X \cdot A \cdot X &= Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P \cdot P^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P \\
&= Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P \\
&= Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & \mathbb{O} \\ \hline X_2 & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P \\
&= Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0^2 & X_0 \cdot X_1 \\ \hline X_2 \cdot X_0 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P = X.
\end{aligned}$$

Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{2\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$, pri čemu važi $X_0^2 = X_0$, $X_0 \cdot X_1 = X_1$ i $X_2 \cdot X_0 = X_2$. Za proizvoljne matrice X_0, X_1 i X_2 redom tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times r$ za koje važi $X_0^2 = X_0$, $X_0 \cdot X_1 = X_1$ i $X_2 \cdot X_0 = X_2$ matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *opštim $\{2\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{2\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_2 = n \cdot m - (n-r) \cdot (m-r) = r(n+m-r)$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_1 i X_2 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{2\}$-inverzom* matrice A.

Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ proizvoljna matrica i $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. *$\{1,2\}$-inverz* ili *refleksivni uopšteni inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine $A \cdot X \cdot A = A$ i $X \cdot A \cdot X = X$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_1 i X_2 proizvoljne matrice redom tipa $r\times(m-r)$ i $(n-r)\times r$, jeste $\{1,2\}$-inverz matrice A. Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{1,2\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2\cdot X_1\end{array}\right]\cdot P$. Za proizvoljne matrice X_1 i X_2 redom tipa $r\times(m-r)$ i $(n-r)\times r$ matricu $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2\cdot X_1\end{array}\right]\cdot P$ nazivamo *opštim $\{1,2\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{1,2\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_{1,2}=n\cdot m-r^2-(n-r)\cdot(m-r)=r(n+m-2r)$. Za konkretno izabrane matrice X_1 i X_2 matricu $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2\cdot X_1\end{array}\right]\cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{1,2\}$-inverzom* matrice A.

Zadatak 0.14 Data je matrica $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.1, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X=Q\cdot\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline x_1 & x_2\end{array}\right]\cdot P=\begin{bmatrix} -2+2x_1-x_2 & 3-3x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2 & 3x_1-x_2 \\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Data matrica je opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A. □

Zadatak 0.15 Data je matrica $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.2, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X=Q\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & z\end{array}\right]\cdot P.$$

$$z=\begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2$$

Opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X=Q\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & x_1y_1+x_2y_2\end{array}\right]\cdot P=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & x_1y_1+x_2y_2\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 0.16 Data je matrica $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.3, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & y_{11} & y_{12} \\ 1 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ \hline x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot P.$$

$$\left[\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_1y_{11}+x_2y_{21} & x_1y_{12}+x_2y_{22} \end{array}\right]$$

Opšti $\{1,2\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & y_{11} & y_{12} \\ 1 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ \hline x_1 & x_2 & x_1y_{11}+x_2y_{21} & x_1y_{12}+x_2y_{22} \end{array}\right] \cdot P =$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & y_{11} & y_{12} \\ 0 & 1 & y_{21} & y_{22} \\ \hline x_1 & x_2 & x_1y_{11}+x_2y_{21} & x_1y_{12}+x_2y_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

□

Zadatak 0.17 Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ realna matrica tipa $m \times n$. Dokazati da je matrica $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\{1\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{2\}$-inverz matrice X.

Rešenje. Matrica X je $\{1\}$-inverz matrice A ako i samo ako važi $A \cdot X \cdot A = A$. Matrica A je $\{2\}$-inverz matrice X ako i samo ako važi $A \cdot X \cdot A = A$. Prema tome, matrica X $\{1\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{2\}$-inverz matrice X. Odavde sledi i da je matrica X $\{1,2\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{1,2\}$-inverz matrice X. □

Zadatak 0.18 Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $Y,Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrice A. Dokažimo da je matrica $X = Y \cdot A \cdot Z$ jedan $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Matrica X je $\{1\}$-inverz matrice A ako i samo ako važi $A \cdot X \cdot A = A$. Važi $A \cdot X \cdot A = A \cdot (Y \cdot A \cdot Z) \cdot A = (A \cdot Y \cdot A) \cdot Z \cdot A = A \cdot Z \cdot A = A$. Matrica X je $\{2\}$-inverz matrice A ako i samo ako važi $X \cdot A \cdot X = X$. Važi $(Y \cdot A \cdot Z) \cdot A \cdot (Y \cdot A \cdot Z) = Y \cdot (A \cdot Z \cdot A) \cdot (Y \cdot A \cdot Z) = Y \cdot A \cdot (Y \cdot A \cdot Z) = Y \cdot (A \cdot Y \cdot A) \cdot Z = Y \cdot A \cdot Z = X$. □

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna realna matrica tipa $m \times n$ i neka su P i Q realne regularne matrice reda m i n za koje važi $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Neka su S i T matrice

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right] \quad \text{i} \quad T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$, a T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$. Matrice S i T su simetrične. Zaista, imamo

$$S^T = \left(P \cdot P^T\right)^T = \left(P^T\right)^T \cdot P^T = P \cdot P^T = S$$

$$T^T = \left(Q^T \cdot Q\right)^T = Q^T \cdot \left(Q^T\right)^T = Q^T \cdot Q = T.$$

Važi i

$$S_1^T = S_1 \quad S_2^T = S_3 \quad S_3^T = S_2 \quad S_4^T = S_4$$

$$T_1^T = T_1 \quad T_2^T = T_3 \quad T_3^T = T_2 \quad T_4^T = T_4.$$

Definicija 0.1.2 Za simetričnu matricu $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ kažemo da je *pozitivno definitna* ako za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ važi da je $x^T \cdot S \cdot x > 0$.

■ **Primer 0.1** Matrica $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ je pozitivno definitna.

Rešenje. Zaista za svaku matricu $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ važi:

$$\begin{aligned} x^T \cdot S \cdot x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2\right] = \left[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right]. \end{aligned}$$

Kako je bar jedan od brojeva x_1 i x_2 različit od nule važi da je $x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$, odnosno imamo da je $x^T \cdot S \cdot x > 0$, odakle odmah zaključujemo da je matrica S pozitivno definitna. □

Propozicija 0.1.1 Neka su $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularne matrica reda m i n. Tada su simetrične matrice $T = Q^T \cdot Q$ i $S = P \cdot P^T$ pozitivno definitne.

Dokaz. Dokažimo da je matrica T pozitivno definitna, analogno se dokazuje i za matricu S. Potrebno je pokazati da za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ važi da je $x^T \cdot T \cdot x > 0$. Imamo $x^T \cdot T \cdot x = x^T \cdot (Q^T \cdot Q) \cdot x = (x^T \cdot Q^T) \cdot (Q \cdot x) = (Q \cdot x)^T \cdot (Q \cdot x)$. Označimo sa $y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ proizvod matrica $Q \cdot x$. Prema tome, $x^T \cdot T \cdot x = y^T \cdot y = \begin{bmatrix} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \end{bmatrix}$. Kako je matrica Q regularna i x nenula matrica sledi da je i y nenula matrica, a odatle da je $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 > 0$, odnosno da je $x^T \cdot T \cdot x > 0$, tj. da je matrica T pozitivno definitna. ■

Teorema 0.1.2 Neka je $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pozitivno definitna matrica i neka su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$. Tada je S regularna matrica i važi da je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1} \cdot S_2 \cdot \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \\ -S_4^{-1} \cdot S_3 \cdot \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna matrica i $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Neka je $S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right]$, gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$. *$\{3\}$-inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $(A \cdot X)^T = A \cdot X$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0 \cdot S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_0, X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r \times r$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, i za koju važi $\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)\cdot X_0^T = X_0\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)$, jeste $\{3\}$-inverz matrice A. Zaista, važi:

$$(A\cdot X)^T = \left(P^{-1}\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O}\\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{array}\right]\cdot Q^{-1}\cdot Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]\cdot P\right)^T =$$

$$\left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ X_2 & X_3\end{bmatrix}\cdot P\right)^T = \left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot P\right)^T =$$

$$P^T\cdot\begin{bmatrix} X_0^T & \mathbb{O}\\ \left(-X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\right)^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\left(P^{-1}\right)^T = P^T\cdot\begin{bmatrix} X_0^T & \mathbb{O}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\left(P^T\right)^{-1} =$$

$$\left(P^{-1}\cdot P\right)\cdot P^T\cdot\begin{bmatrix} X_0^T & \mathbb{O}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\left(P^T\right)^{-1}\cdot\left(P^{-1}\cdot P\right) = P^{-1}\cdot\left(P\cdot P^T\right)\cdot\begin{bmatrix} X_0^T & \mathbb{O}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\left(P\cdot P^T\right)^{-1}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X_0^T & \mathbb{O}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1}\cdot S_2\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} S_1\cdot X_0^T - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\\ S_3\cdot X_0^T - S_4\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\cdot X_0^T & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1}\cdot S_2\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)\cdot X_0^T & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1}\cdot S_2\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1}\cdot S_2\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ -S_4^{-1}\cdot S_3\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot\left(S_2 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)\cdot\left(S_4 - S_3\cdot S_1^{-1}\cdot S_2\right)^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot P = P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ X_2 & X_3\end{bmatrix}\cdot P =$$

$$P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\cdot Q^{-1}\cdot Q\cdot\begin{bmatrix} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ X_2 & X_3\end{bmatrix}\cdot P = A\cdot X.$$

Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{3\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]\cdot P$, pri čemu važi $\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)\cdot X_0^T = X_0\cdot\left(S_1 - S_2\cdot S_4^{-1}\cdot S_3\right)$. Za proizvoljne matrice X_0, X_2 i X_3 redom tipa $r\times r$, $(n-r)\times r$ i $(n-r)\times(m-r)$ matricu $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]\cdot P$ nazivamo *opštim $\{3\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{3\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_3 = n\cdot m - r\cdot(m-r)$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_2 i X_3 matricu $Q\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0\cdot S_2\cdot S_4^{-1}\\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]\cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{3\}$-inverzom* matrice A.

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna matrica i $P\cdot A\cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O}\\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Neka je $S = P\cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2\\ \hline S_3 & S_4\end{array}\right]$, gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r\times r$, $r\times(m-r)$, $(m-r)\times r$ i $(m-r)\times(m-r)$. *$\{1,3\}$-inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine $A \cdot X \cdot A = A$ i $(A \cdot X)^T = A \cdot X$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1,3\}$-inverz matrice A. Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{1,3\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$. Za proizvoljne matrice X_2 i X_3 redom tipa $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$ matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *opštim $\{1,3\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{1,3\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_{1,3} = (n-r) \cdot r + (n-r) \cdot (m-r) = (n-r)m$. Za konkretno izabrane matrice X_2 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{1,3\}$-inverzom* matrice A.

Zadatak 0.19 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.1, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline x_1 & x_2 \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} -2+2x_1-x_2 & 3-3x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2 & 3x_1-x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Data matrica je i opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A. □

Zadatak 0.20 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.2, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 & z \end{array}\right] \cdot P$$

a matrica P je:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, imamo:

$$P \cdot P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{17}{9} & 2 \\ \hline 1 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad S_4 = [6] \qquad S_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$-S_2 \cdot S_4^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline x_1 & x_2 & z \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline x_1 & x_2 & z \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$ □

Zadatak 0.21 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.3, opšti $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & y_{11} & y_{12} \\ 1 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ \hline x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot P,$$

a matrica P je:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, imamo:

$$P \cdot P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \hline -1 & -1 & 6 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad S_4 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad S_4^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-S_2 \cdot S_4^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ proizvoljna matrica i $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Neka je $T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right]$, gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r\times r$, $r\times(n-r)$, $(n-r)\times r$ i $(n-r)\times(n-r)$. *$\{4\}$–inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $(X \cdot A)^T = X \cdot A$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_0, X_1 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r\times r$, $r\times(m-r)$ i $(n-r)\times(m-r)$, i za koju važi $X_0^T \cdot \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right) = \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right) \cdot X_0$, jeste $\{4\}$-inverz matrice A. Važi i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{4\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, pri čemu važi $X_0^T \cdot \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right) = \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right) \cdot X_0$. Za proizvoljne matrice X_0, X_1 i X_3 redom tipa $r\times r$, $r\times(m-r)$ i $(n-r)\times(m-r)$ matricu $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *opštim $\{4\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{4\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_4 = n \cdot m - (n-r) \cdot r$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_2 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{4\}$-inverzom* matrice A.

Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ proizvoljna matrica i $P \cdot A \cdot Q = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Neka je $T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right]$, gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$. *$\{1,4\}$-inverz* matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine $A \cdot X \cdot A = A$ i $(A \cdot X)^T = A \cdot X$. Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ gde su X_1 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1,4\}$-inverz matrice A. Može se pokazati i obrat tvrđenja, tj. da se svaki $\{1,4\}$-inverz može predstaviti u obliku proizvoda matrica $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$. Za proizvoljne matrice X_1 i X_3 redom tipa $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times (m-r)$ matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *opštim $\{1,4\}$-inverzom* matrice A. U opštem $\{1,4\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_{1,4} = r \cdot (m-r) + (n-r) \cdot (m-r) = n \cdot (m-r)$. Za konkretno izabrane matrice X_1 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo *partikularnim $\{1,4\}$-inverzom* matrice A.

Zadatak 0.22 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti $\{1,4\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.1, $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline x_1 & x_2 \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} -2 + 2x_1 - x_2 & 3 - 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 & 3x_1 - x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

a matrica Q je:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, imamo:

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_4 = [2] \quad T_4^{-1} = \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$-T_4^{-1} \cdot T_3 = -\left[\frac{1}{2}\right] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\{1,4\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 0.23 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti $\{1,4\}$-inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.3, $\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & y_{11} & y_{12} \\ 1 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ \hline x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot P,$$

a matrica Q je:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, imamo:

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \quad T_4 = [5] \quad T_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$-T_4^{-1} \cdot T_3 = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$\{1,4\}$-inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & y_{11} & y_{12} \\ 1 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ \hline \frac{2}{5} & 0 & z_1 & z_2 \end{array}\right] \cdot P.$$

□

Moore-Penrose-ov inverz matrice A je matrica X koja zadovoljava sistem Penrose-ovih jednačina:

(1) $A \cdot X \cdot A = A$

(2) $X \cdot A \cdot X = X$

(3) $(A \cdot X)^T = A \cdot X$

(4) $(X \cdot A)^T = X \cdot A$.

Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot S_2 \cdot S_4^{-1} \end{array}\right] \cdot P$, jeste *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A.

Zadatak 0.24 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadataka 0.1, 0.14, 0.19 i 0.22 *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 0.25 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A.

Rešenje. Na osnovu Zadatka 0.3, 0.16 , 0.21 i 0.23 *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A je matrica:

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{15} \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 0.26 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Odrediti *Moore-Penrose*-ov inverz matrice A.

Rešenje.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \\ \hline I_4 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \end{array}\right].$$

$$P = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{1\}$-inverz matrice A je matrica:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= Q\cdot\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline x_1 & x_2 & x_3\end{array}\right]\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline x_1 & x_2 & x_3\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} -5 & 1 & -4\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1-2x_1 & -2x_2 & -2x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -5 & 1 & -4\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -5+10x_1+6x_2-2x_3 & 1-2x_1-2x_2 & -4+8x_1+2x_2-2x_3\\ -5x_1-3x_2+x_3 & x_1+x_2 & -4x_1-x_2+x_3\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\{1,2\}$-inverz matrice A je opet matrica X_1.
$\{1,3\}$-inverz matrice A je takođe matrica X_1.
Odredimo $\{1,4\}$-inverz matrice A.

$$
Q^T\cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}
$$

$$
T_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad T_4 = [5] \qquad T_4^{-1} = \left[\frac{1}{5}\right]
$$

$$
-T_4^{-1}\cdot T_3 = -\left[\frac{1}{5}\right]\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{14} &= Q\cdot\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline \frac{2}{5} & 0 & 0\end{array}\right]\cdot P\\
&= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5}\\ -2 & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Moore-Penrose-ov inverz matrice A je matrica X_{14}. □